Zadání První Série

Termín Odevzdání: 29. 10. 2012

Náš příběh začíná naprosto obyčejným probuzením jednoho obyčejného komára Bonifáce. Dneska se necítil úplně fit, třeštila ho tak hlava, že se musel vydat do koupelny. Umyl si všechny své ruce, (vlastně si nebyl jist, jestli jsou to ruce, nebo nohy) opláchl hlavu, vyčistil sosák a šel se nasnídat.

Úloha 0. *Navrhněte, popište a nakreslete stroj na čištění komářího sosáku.*

Pohled do diáře mu připomněl, že už měl dávno být na lamích závodech. Začal si tedy oblékat kombinézu, což byl úkol dozajista velmi náročný, ale po 10 minutách urputného boje s několika centimetry čtverečními látky vyhrál a vyletěl vstříc lamímu závodišti. Kdyby nebyl tak závislý na hazardu, šel by si jako každý jiný komár sednout na tribunu. Místo toho ale vyrazil ke své oblíbené přepážce za zlatohlávkem Jonatánem vsadit si na lamu.

Úloha 1. *Zpočátku si chtěl Bonifác vsadit na své šťastné číslo, ale protože byl pověrčivý, svou volbu několikrát změnil. Své šťastné číslo zdvojnásobil, přičetl k němu 4, výsledek vydělil 2, přidal 7, vše vynásobil 8, odečetl 12. To se mu zdálo pořád málo, proto výsledek ještě vydělil 4 a pak odečetl 11 a byl konečně spokojen. Dokážete určit Bonifácovo šťastné číslo, když si nakonec vsadil na lamu číslo 16?*

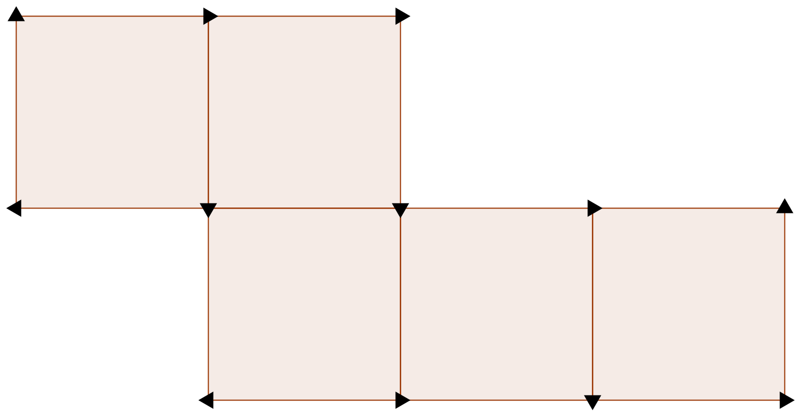
Spokojen se svou volbou šel si Bonifác sednout. Dříve než si mohl všimnout hovnivála valícího si svou kuličku, uděřila ho do sosáku nelibá vůně. Zamotala se mu hlava a upustil svůj kurzovní lístek Když se probral, zjistil, že hovnivál byl rychlejší a přejel kuličkou i lístek, na kterém nyní chyběly podstatné informace.

Úloha 2. *Pomozte Bonifácovi správně doplnit kurzovní lístek. Na volná místa doplňte čísla tak, aby byla tvrzení v tabulce pravdivá.*

V této tabulce je napsáno	*?*	*číslic*	*0*
V této tabulce je napsáno	*?*	*číslic*	*1*
V této tabulce je napsáno	*?*	*číslic*	*2*
V této tabulce je napsáno	*?*	*číslic*	*3*
V této tabulce je napsáno	*?*	*číslic*	*4*

Závody probíhaly velmi zajímavě, po flusání na pohyblivý cíl na 50 centimetrů byl jeho favorit na 5. místě, ale po flusu na statický cíl ve vzdálenosti 1 metr se vyhoupl na 2. místo. Ve sprintu na 2 metry suverénně zvítězil a přivedl Bonifáce k solidní hromádce zrnek pylu. Tentokrát na sázení vydělal, a tak se vydal k místnímu občerstvení a dal si do sosáku. Dopřál si šálek sladké kávy, za cukr si sice musel připlatit, protože na něm byl už pěkných pár let závislý, ale to mu vůbec nevadilo. Horší problém byl nasypat cukr do hrnečku.

Úloha 3. *Bonifác si láme hlavu, jak změnit krystalickou mřížku cukru tak, aby se mu všechen vešel do hrnečku. Z původní mřížky (viz obrázek) potřebuje vytvořit právě čtyři shodné čtverce. Zvládne ale přemístit pouze dvě cukrové špejle. Pomůžete mu vyřešit problém?*



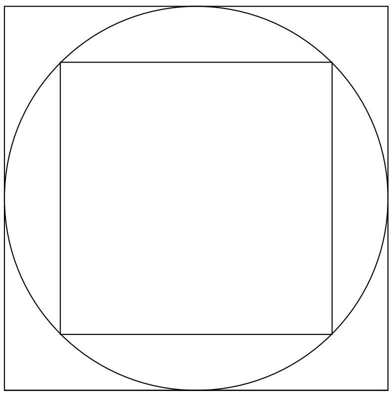
Konečně ukojil svoji touhu po cukru a začal přemýšlet, jak dopravit všechna zrnka pylu domů. Jonatán mu s nimi ze závisti nepomůže, tím si byl jist. Oko mu náhle padlo na lamy, které se pásly v okolí závodiště. Mohl by si je zkusit najmout.

Úloha 4. ***a)*** *Bonifácovi se podařilo najmout pouze 7 lam. Každá lama uveze 3000 zrnek, je možné na tyto lamy naložit všech 50 pytlíčků o 370, 372, 374, …, 468 zrnkách? Pokud ano, jak? Pokud ne, proč?*
b) *Každá lama uveze maximálně 30 gramů zrnek. Kolik minimálně lam si musí Bonifác najmout, aby měl jistotu, že to vystačí na odvoz několika pytlíčků, ve kterých je dohromady 100 gramů zrnek a každý jeden obsahuje nejvýše 10 gramů zrnek? Každý pytlíček může obsahovat jiný počet zrnek.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnáií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Nakonec se našemu komárovi podařilo všechna zrnka pylu dopravit domů. Protože byl ale skrblík, rozhodl se povečeřet v lidském domě a ušetřené peníze nechat na horší časy. A tak se stalo. Roztáhl křídla směr nejbližší lidská osada. K jeho zklamání byli lidé ještě v práci, a tak se hladový ukryl do šatníku lidí, kde si chtěl na pár hodin schrupnout. Z jeho sladkých krvavých snů ho ale brzy probudilo chroupání a mlaskání jeho kamarádky šatní molky Cecilky, která hodovala na jednom z kabátů.

Úloha 5. ***a)*** *Cecilka nejprve vykousala z kabátu čtverec o straně a, stále to pro ni byla velká porce, a tak z tohoto čtverce vykousala kružnici jemu vepsanou. Na noc ale není zdravé přecpávat se, proto z této kružnice vykousala čtverec jí vepsaný mající hrany rovnoběžné s původním čtvercem (viz obrázek). Teď už začala hodovat. Jak moc si pomohla? Kolikrát je obsah původního čtverce větší než obsah čtverce, který snědla?*



b) *Kabát má dva kruhové knoflíky* k_1, k_2 *s poloměry* r_1, r_2. *Navrhněte a setrojte Cecilce přímku, jak se má prokousat kabátem, která se dotýká každého knoflíku právě v jednom bodě* T_1, T_2. *(U knoflíků ani kabátu neuvažujte jejich tloušťku.)*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnáií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Když Bonifáce přestalo bavit Cecilčino mlaskání, vydal se průzkum. Lidé se už vrátili. Poletoval po místnosti, tu usedl na velkého člověka, tu na malého. Co se ale nestalo. Prásk! Noviny dopadly jen několik milimetrů od jeho levého křídla. Kličkoval ve vzduchu, prováděl přemety, obraty, výkruty, vývrtky, ale vše bylo marné - vždy za ním jako stín letěla Smrt v podobě obyčejných novin. V zápasu o život však uviděl u spíže malou díru ve stěně, upnul k ní všechny své naděje, zanechal bravurního, přesto však zbytečného manévrování, a vydal se plnou rychlostí k díře. Jaké bylo jeho překvapení, když vlétl přímo do centra komářího mejdanu.

Úloha 6. *V díře je několik komárů a mušek. Každá muška se zná s pěti dalšími muškami a deseti komáry a každý komár se zná s šesti dalsími komáry a devíti muškami. Koho je v díře víc, mušek, nebo komárů?*

Po sladké večeři se komár vrátil domů a už se těšil na další den.

Důkazové Metody

Díl První

Je tu nový ročník našeho semináře a s ním i nový seriál, letos o důkazových metodách v matematice. V průběhu školního roku si na rozmanitých příkladech ukážeme řadu používaných důkazových postupů. V matematice, vědě nejexaktnější ze všech věd, nemůžeme jen tak znenadání prohlásit "platí to a to". Každé nové tvrzení, chceme-li, aby bylo uznáno jako pravdivé a aplikované dál, musí být doprovázeno důkazem, neboli logickým postupem založeným na platnosti již dříve dokázaných tvrzení.

Nejpřirozenějším způsobem, jak uchopit nějakou důkazovou úlohu je tzv. **přímý důkaz**. Jak název napovídá, vycházíme z předpokladů, které nám úloha poskytuje a menšími dedukcemi se z nich postupně propracujeme ke kýženému tvrzení.

Jednou z obvyklých forem přímého důkazu jsou ekvivalentní úpravy výrazů. Postupnými úpravami si přetvoříme zadaný výraz do takové podoby, ze které půjde lépe vidět dokazované tvrzení.

Příklad. *Dokaže, že pro libovolné $x > 0$ platí*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Řešení. Budeme zadanou nerovnost ekvivalentně upravovat. Všimněme si, že díky podmínce $x > 0$ můžeme bez problémů násobit x a zbavit se zlomků:

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

Sčítání a odečítání jsou zde taktéž ekvivalentní, můžeme tedy všechny členy převést na jednu stranu.

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0.$$

Nyní je potřeba si všimnout, že na levé straně můžeme užít vzorce $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ pro $A = x$ a $B = 1$, čímž dostáváme

$$(x-1)^2 \geq 0.$$

Na tomto místě můžeme již úprav zanechat, protože je vidět, že jsme hotovi: na levé straně máme kvadrát reálného čísla, což je číslo vždy nezáporné, tedy určitě větší nebo rovno nule. A protože jsme tohoto tvaru docílili ekvivalentními úpravami ze zadané nerovnosti, platí i původní nerovnost.

□

Pochopitelně, jednotlivé kroky přímého důkazu mohou mít i jinou podobu, než ekvivalentní úpravy.

Příklad. *Dokažte, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné 6 pro libovolné přirozené n.*

Řešení. Nejprve si všimněme, že $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$. Vidíme, že je to tedy součin tří po sobě jdoucích nezáporných celých čísel. Ve druhém kroku si uvědomíme, že dokázat dělitelnost 6 je totéž, jako dokázat dělitelnost 2 a pak 3. Pro důkaz dělitelnosti dvěma si všimneme, že když jsou n a $n+1$ po sobě jdoucí, tak právě jedno z nich je sudé, tedy dělitelné dvěma. Pro dělitelnost třemi postupujeme zcela analogicky - mezi každými třemi po sobě jdoucími čísly musí být právě jeden násobek tří, takže i náš výraz musí být dělitelný třemi. Dokázali jsme dělitelnost 2 i 3, takže jsme dokázali i dělitelnost 6 a jsme hotovi.

□

Představili jsme si přímý důkaz a na jednoduchých příkladech jsme si ukázali některé jeho obdoby. Nyní je načase, abyste si zkusili něco dokázat i sami - v první seriálové úloze.

Úloha 7. *Pro reálná čísla a, b, c platí $0 < a < b < c < 1$. Dokažte, že*

$$1 - (1-a)(1-b)(1-c) > c.$$

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ