Zadání Třetí Série

Termín Odevzdání: 21. 1. 2013

Komár Bonifác se začal pomalu probouzet, ale jak to, že na něj prší? Když šel včera večer spát, tak přece ležel ve svém domečku v odmocnině, zatímco teď leží na nějakém poli a on ví, že v Ludolfově údolí žádná pole nejsou. Rozhlédl se kolem dokola, přes hustý déšť však nic neviděl. Najednou někde v dáli uslyšel svou oblíbenou matematickou píseň. Vydal se proto směrem, odkud ji slyšel.

Úloha 0. *Napište krátkou báseň nebo píseň o vřelém vztahu komárů k matematice.*

Jak šel, přemýšlel, co se asi během noci stalo, například jestli se ho někdo nechtěl zbavit před volbami nového starosty. Zahloubaně došel až k nějakému doupěti, které ho zaujalo svým tvarem připomínajícím parabolu. Zaklepal na dveře, opět parabolické, ale nikdo neodpověděl. Vešel dovnitř, nikde ani živáčka. Protože měl hlad, využil pánve a toastů, které zde našel, a udělal si snídani.

Úloha 1. *Bonifác se rozhodl, že si k snídani osmaží na pánvi 3 toasty. Každý z nich se musí smažit 5 minut z každé strany a na pánev se zaráz vlezou pouze dva. Kolik minimálně času musí Bonifác kuchtit?*

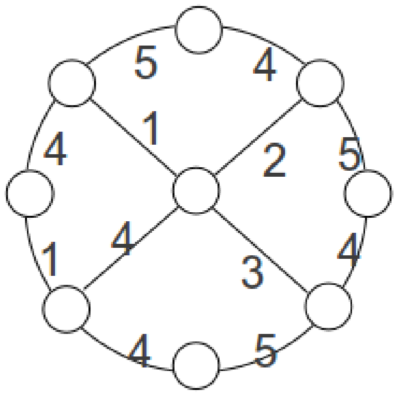
Když už měl toasty dodělané, vešel dovnitř majitel stavení. Vypadal jako funkce x^2. Naštěstí byl na Bonifáce přátelský a nechal ho toasty sníst. Na oplátku chtěl po Bonifácovi, aby mu řekl výsledek příkladu, který dostal od místního krále (to bylo zajímavé, jelikož Bonifác neznal v okolí Ludolfova údolí žádné království).

Úloha 2. *Král pořádal rytířské klání, kterého se účastnili rytíři Aleš, Bedřich, Cyril a Dan. Na otázku, jak se v něm umístili, odpověděli:*
Aleš: „Nebyl jsem ani první, ani poslední.“
Bedřich: „Nebyl jsem poslední.“
Cyril: „Byl jsem první.“
Dan: „Byl jsem poslední.“
Je známo, že tři z rytířů mluvili pravdu a jeden lhal. Kdo se v klání umístil první? Kdo lhal?

Bonifác si s příkladem lehce poradil a poté se zeptal, kde najde Ludolfovo údolí. Dověděl se, že leží celkem nedaleko, ale že jediný východ z království, jeskyni, střeží zlá derivace. Bonifác se přesto vydal na cestu, protože už pár derivací přemohl. Došel až k ústí jeskyně, na dveřích byl nápis:

Vstoupit může jen ten, kdo zadá správný kód.

Úloha 3. *Do níže uvedeného obrazce doplňte čísla 1-9, každé právě jednou, tak, aby se rozdíl čísel v libovolných dvou sousedních kroužcích (spojených čarou) rovnal číslu napsanému mezi nimi (vždy odečítáme menší číslo od většího). Najděte všechny takové možnosti a zdůvodněte, proč jiné možnosti nevyhovují.*



Jakmile Bonifác příklad vyřešil, dveře se otevřely a on vešel dovnitř. Pokračoval dále, až se dostal na druhou stranu jeskyně, kde mu cestu zastoupila zlá derivace. „Dnes mám dobrou náladu“, odvětila, „pokud vyřešíš úlohu, kterou ti zadám, pusím tě dál.“

Úloha 4.
a) *Kolik existuje prvočísel, která mají součet cifer roven 12?*
b) *Najděte trojici prvočísel p, q, r takovou, že jejich součet je 222 a navíc $60p - 39q = 2013$.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Bonifác úlohu hbitě vyřešil a vyšel ven z jeskyně. Zde zjistil, že je vysoko nad zemí a že se dolů dostane jen velmi těžko. Napadlo ho však využít svůj plášť jako paraglide a doletět tak až do údolí.

Úloha 5. *Mějme rovnostranný trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V.*
a) *Ukažte, že součet vzdáleností bodu V od všech stran trojúhelníka je stejný, jako vzdálenost bodu C od strany AB.*
b) *Kdekoli na obvodu trojúhelníka mimo vrcholy A, B, C zvolme bod P. Ukažte, že součet vzdáleností bodu V od všech stran trojúhelníka je stejný, jako součet vzdáleností bodu P od obou stran trojúhelníka, na kterých neleží.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Když doletěl do údolí, byla už tma, což mu vyhovovalo, protože si nikdo nevšiml jeho příletu. V klidu se mohl připravit na to, aby další den zjistil, kdo se ho chtěl zbavit. Před spaním si však ještě sedl k šachovnici.

Úloha 6. *Mějme šachovnici 8×8, ze které je vyříznut pravý horní roh. Do levého horního rohu postavíme věž. Ta se může pohybovat podle standardních šachových pravidel (pouze vodorovně nebo svisle). Lze s ní projít každé pole šachovnice kromě počátečního právě jednou a vrátit se do počátečního pole?*

Vyřešením úlohy si zvedl náladu a už ho tolik netrápilo, že si při letu zničil svůj plášť, když zapomněl, že na létání má křídla. Nyní si už opravdu šel lehnout na svou odmocninu a nastavil si budík, aby dříve vstal, protože nechtěl, aby ho tu někdo našel.

Důkazové Metody

Díl Třetí

Vítám vás v tomto předvánočním čase již u třetího dílu seriálu o důkazech v matematice. Tentokrát se ponoříme do jedné z nejelegantnějších důkazových technik vůbec - podíváme se na **princip extrému**.

Příklad. *Dokažte, že všechna přirozená čísla jsou zajímavá.*

Řešení. Předpokládejme, že existují nějaká nezajímavá přirozená čísla. Pak mezi nimi existuje nějaké **nejmenší** číslo. Máme tedy nejmenší nezajímavé číslo - to je ale veskrze zajímavá vlastnost, takže tohle číslo je určitě zajímavé, což je spor s předpokladem, že je nezajímavé! Tudíž všechna přirozená čísla musí být zajímavá. ♣

Jak jste si mohli všimnout v této nepříliš seriózní úvodní úložce, v následujících úlohách bude hlavním obratem řešení zvolit si nějakou vhodnou veličinu, která se v úloze vyskytuje, a uvážit její extrémní stav - tj. její minimum či maximum. Z tohoto stavu pak můžeme často vyvodit důsledky, které jinak nejsou vůbec zřejmé, a mnohé jinak velice obtížné úlohy se po takovém triku stávají triviálními.

Příklad. *Dokažte, že libovolný mnohostěn v prostoru má nějaké dvě stěny, které mají stejný počet hran.*

Řešení. Uvažme stěnu mnohostěnu, která má **nejvyšší** počet hran, označme jej n. S touto stěnou sousedí dalších n stěn a každá z těchto stěn má díky našemu předpokladu nejméně 3 a nejvýše n hran - celkem je tedy $n-2$ možností, kolik hran mohou mít tyto sousední stěny. Jelikož je však sousedních stěn více, než je počet možností, kolik mohou mít hran, pak některé dvě musí mít stejně hran (viz Dirichletův princip) a jsme hotovi. ♣

Na této úloze je krásně vidět, jak nám náš nový nástroj usnadní práci - kdybychom chtěli to samé tvrzení dokazovat bez výše uvedeného triku, museli bychom se nejspíše uchýlit k základním výsledkům teorie grafů (zájemce odkáži na takzvané Handshaking lemma) a řešení by se značně protáhlo a navíc by vyžadovalo nějaké další znalosti.

Řešení pomocí principu extrému jsou typická zejména svou krátkostí, elegantností a také tím, že je občas velice těžké takové řešení objevit, ale když už ho člověk zná, zdá se triviální.

Příklad. *Na obvodu kružnice rozmístíme 30 čísel tak, že každé číslo je absolutní hodnotou rozdílu dvou následujících ve směru hodinových ručiček (absolutní hodnotou v tomto případě myslíme, že odečítáme menší číslo od většího). Součet těchto čísel je 1. Jaká jsou to čísla a jak jsou rozmístěna? Najděte všechna řešení.*

Řešení. Označme **největší** z těchto čísel a. To musí být rozdílem nějakých následujících dvou čísel - kdyby obě byla kladná, muselo by jedno z nich být větší než a, což nelze vzhledem k volbě a, takže jediná možnost, jaká mohou být další dvě čísla, je dvojice $0, a$. Nyní jsou dvě možnosti - buď jsou za a v pořadí $0, a$ nebo $a, 0$. Když prověříme obě možnosti, zbytek čísel na obvodu už se snadno doplní (přenechávám čtenáři) a v obou případech vyjde stejné řešení - po obvodu se desetkrát opakuje trojice $a, a, 0$, takže a je obsaženo dvacetkrát a tudíž $a = \frac{1}{20}$ a jsme hotovi. ♣

Ukážeme si ještě poslední úložku, kde se princip extrému vyskytuje jen okrajově, nicméně myšlenka, že by snad mohl být použit, rychle vede k jednoduchému řešení.

Příklad. *V průběhu dne navštívilo knihovnu 100 lidí. Ukázalo se, že z libovolných tří čtenářů se ten den v knihovně aspoň dva potkali (přitom každý tam byl během dne právě jednou). Dokažte, že zaměstnanec knihovny může zahlásit důležité hlášení ve dvou okamžicích tak, že je uslyší všech 100 lidí.*

Řešení. Uvažme čtenáře A, který přišel jako úplně první a čtenáře B, který přišel jako úplně poslední. Když teď vezmeme libovolného jiného čtenáře C a uvážíme trojici A, B, C, tak vidíme, že čtenář C musel přijít společně buď s A nebo s B, takže takto všechny čtenáře rozdělíme do dvou skupinek a jsme hotovi. ♣

Tímto skončím s povídáním a je teď na vás, abyste si vyzkoušeli nový obrat na seriálové úložce.

Úloha 7. *Do políček šachovnice 8×8 rozestavíme čísla tak, že každé číslo je aritmetickým průměrem čísel na sousedních políčkách (jako sousední bereme ta, se kterými má dané políčko společnou stranu). Dokažte, že všechna vepsaná čísla jsou stejná.*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.