Úloha 1. *Profesor měl chytré hodinky, které se sice opožďovaly, ale zaznamenávaly informace o své poruše. Věděl tedy dvě věci: Začaly se mu opožďovat přesně v osm hodin ráno a zpožďovaly se mu tak, že po uplynutí každé celé hodiny přidaly k aktuálnímu času 1/30 času, který uběhl od půlnoci. Kolik ukazovaly jeho hodinky ve chvíli, když ve skutečnosti byly 2 hodiny odpoledne?*

V osm hodin se začaly hodinky zpožďovat, tedy první celé zpoždění započítáme v 9 hodin. Spočítáme, jaké zpoždění udělaly hodinky ve kterých hodinách a výsledky sečteme:

- 9.00: 9 h = 540 min $\Rightarrow$ 540 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 18 min
- 10.00: 10 h = 600 min $\Rightarrow$ 600 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 20 min
- 11.00: 11 h = 660 min $\Rightarrow$ 660 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 22 min
- 12.00: 12 h = 720 min $\Rightarrow$ 720 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 24 min
- 13.00: 13 h = 780 min $\Rightarrow$ 780 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 26 min
- 14.00: 14 h = 840 min $\Rightarrow$ 840 min $\cdot \frac{1}{30}$ = 28 min

Celkové zpoždění: $18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 = 138$ min= 2h 18 min

Hodinky tedy ukazovaly 16:18 hodin.

Úloha 2. *Profesorovi by trvala analýza rukopisů 3 hodiny, každému z jeho asistentů by tato analýza trvala 4 hodiny. Jak dlouho bude analýza trvat, budou-li s profesorem pracovat dva asistenti??*

Profesor zvládne celou analýzu za 3 hodiny, tedy za 1 hodinu zvládne $\frac{1}{3}$ práce a za x hodin zvládne $\frac{x}{3}$ analýzy.

Pro asistenta analogicky odvodíme, že za x hodin bude mít hotovo $\frac{x}{4}$ analýzy.

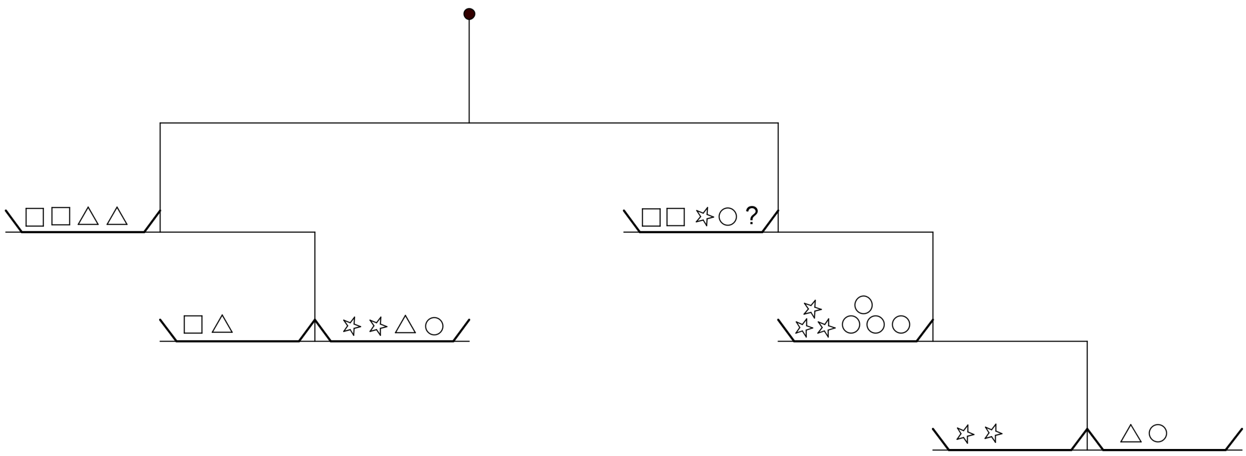
Pokud tedy x označíme hledaný čas, tak získáváme rovnici:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x = 1$$
$$\frac{4}{12}x + \frac{3}{12}x + \frac{3}{12}x = 1$$
$$\frac{10}{12}x = 1$$
$$\frac{5}{6}x = 1$$
$$x = \frac{6}{5}$$

$$x = 1 + \tfrac{1}{5}\text{ h} = 1\text{h } 12\text{ min}$$

Práce jim tedy bude trvat 1 hodinu a 12 minut.

Úloha 3. *Rozložení elektřiny v laboratoři je znázorněno modelem váhy. Na váze jsou rozmístěna různě těžká závaží, znázorněna symboly* ***čtverce, kolečka, trojúhelníku a hvězdičky****. Zjistěte, jaký druh závaží chybí na místě otazníku tak, aby byla váha v rovnováze (uveďte pouze 1 symbol). Moment síly zanedbejte.*



Z pravé části levého ramene vah můžeme vidět, že jeden čtverec a jeden trojúhelník mají stejnou hmotnost jako dvě hvězdičky, trojúhelník a kolečko. Tedy čtverec je stejně těžký jako hvězdička a kolečko. Toto a zbylé údaje, co jsou na váhách, můžeme zapsat rovnicemi, ze kterých dopočítáme otazník:

$$\square\triangle = \star\star\triangle\bigcirc \Rightarrow \square = \star\star\bigcirc$$
$$\star\star = \triangle\bigcirc \Rightarrow \square = \triangle\bigcirc\bigcirc$$
$$\square\square\star\bigcirc? = \star\star\star\star\star\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\triangle$$
$$\Rightarrow \star\star\bigcirc\star\star\bigcirc? = \star\star\star\star\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\triangle$$
$$\Rightarrow ? = \bigcirc\bigcirc\triangle$$
$$\Rightarrow ? = \square$$

Úloha 4. *Najděte nejmenší možné přirozené číslo s těmito vlastnostmi.*

- *Když ho podělím 2, zbytek je 1. Když ho podělím 3, zbytek je 2.*
- *Když ho podělím 4, zbytek je 3. Když ho podělím 5, zbytek je 4.*
- *Když ho podělím 6, zbytek je 5. Když ho podělím 7, zbytek je 6.*
- *Když ho podělím 8, zbytek je 7. Když ho podělím 9, zbytek je 8.*
- *Když ho podělím 10, zbytek je 9.*

Nechť x je dané číslo. Z jeho vlastností vyplývá, že $x + 1$ je dělitelné všemi čísly 2 až 10. Z toho plyne, že $x + 1$ je nejmenší společný násobek čísel 2 až 10, tedy 2520. Hledané číslo je tedy 2519.

Úloha 5. *Bazén s generátorem si můžeme představit jako trojúhelník ABC, kde $|AB| = 4m$ a $|AC| = 8m$. Lávka vede z bodu X, který je středem strany AC, k patě výšky P na stranu AB. Určete hodnotu rozdílu $|XP| - |AB|$.*

Vzhledem k tomu, že trojúhelník ACP je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu P, tak bod P leží na Thaletově kružnici nad přeponou AC. Úsečka spojující střed strany AC a bod P je tím pádem poloměr a má délku poloviční oproti AC. Takže má 4 cm stejně jako AB a jejich rozdíl je 0 cm.

Úloha 6. *Hodnota a je počet otáček generátoru za sekundu a hodnota b je množství Teonitu v kilogramech. Obě tyto hodnoty jsou přirozená čísla. Určete přirozená čísla a, b, pro která platí rovnost: $ab + a + b = 84$.*

Přičteme jedničku a na levé straně vytkneme a:

$$a(b + 1) + b + 1 = 85.$$

Z levé strany můžeme vytknout $b + 1$ a pravou rozložit na prvočísla:

$$(a + 1)(b + 1) = 5 \cdot 17.$$

Číslo 85 tím pádem můžeme jednoznačně napsat jako součin dvou přirozených čísel jako $1 \cdot 85$ nebo $5 \cdot 17$ a pokud by jedna ze závorek byla rovna jedna, tak a nebo b musí být 0 (což není přirozené číslo), tím pádem musí platit, že $a + 1 = 5$, $b + 1 = 17$ nebo naopak, tedy řešením jsou dvě dvojice: $(a, b) = (4, 16)$ a $(b, a) = (4, 16)$.

Úloha 7. *Dveře se odemykají dvojicí celých čísel x a y, pro která platí, že $x \cdot y = 627$. Kolik takových dvojic (x, y) existuje? Dvojice (x, y),(y, x) považujeme za různé.*

Uvědomme si nejprve, že v celých číslech existuje dvojnásobek dvojic existujících v přirozených číslech. Každé dvojici (x, y) v přirozených číslech můžeme totiž přiřadit dvojici záporných čísel $(-x, -y)$ a zjevně $xy = (-x)(-y)$. Stačí tedy najít všechny dvojice přirozených čísel (x, y) a jejich počet vynásobit dvěma. To uděláme tak, že zjistíme počet kladných dělitelů čísla 627 (ten zjevně odpovídá počtu hledaných dvojic). Rozklad tohoto čísla na prvočinitele je roven $627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$. Tedy všichni dělitelé čísla 627 jsou ve tvaru $3^a \cdot 11^b \cdot 19^c$, kde a,b i c mohou být buď nula nebo jedna. Celkem tedy máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ dělitelů, tedy i 8 dvojic přirozených číslech. To znamená 16 dvojic v číslech celých.