Řešení Třetí Série

Úloha 1. *Každý datový proud si představte jako přímku. Datové proudy p a q (kde $p \neq q$) jsou v pořádku, tedy rovnoběžné. Datový proud a je vychýlen tak, že s přímkou p svírá úhel 130^o. Datové proudy p a q protíná také datový proud b, který je na ně kolmý. Označme průsečík přímek a a b jako Z, průsečík a a q jako X a průsečík b a q jako Y. Určete velikost všech vnitřních úhlů trojúhelníku XYZ.*

Víme, že jeden z úhlů, který svírají přímky p a a, je roven $130°$. Druhý z těchto úhlů (tj. vedlejší úhel) má tedy hodnotu $180° - 130° = 50°$. Zároveň víme, že úhel ZXY je souhlasný s tímto úhlem, tedy i $|\measuredangle ZXY| = 50°$.

Přímky b a q jsou na sebe kolmé, tedy $|\measuredangle ZYX| = 90°$. Velikost úhlu XZY pak dostaneme jako $|\measuredangle XZY| = 180° - |\measuredangle ZXY| - |\measuredangle ZYX| = 180° - 50° - 90° = 40°$.

Úloha 2. *SARA se rozhodla prozkoumat databázi zaměstnanců. Nejprve viděla samé zaměstnance označené jako "Generální personál", což byli jak vědci, tak ochranka a uklízečky. Potom si všimla, že existuje i druhá kategorie označená jako "Projekt L-F". Podívejme se na statistiky za poslední tři dny včetně dneška. Za všechny tři dny se v laboratoři objevilo 720 lidí, z čehož 60% tvořil "Generální personál". Včera přišlo do laboratoře dvakrát tolik lidí, co dnes, a předevčírem zde bylo 1,5krát tolik lidí, co včera. Podivné bylo, že žádný člověk nepracoval více než jeden z posledních tří dnů. Třetina celého "Generálního personálu" přišla do práce předevčírem a "Generální personál" tvořil tři čtvrtiny včerejšího osazenstva. Zjistěte, kolik lidí z "Generálního personálu" je dnes v práci a kolik lidí v laboratoři je označeno jako "Projekt L-F".*

Generální personál tvořil 60 procent ze 720 lidí, což je $\frac{60}{100} \cdot 720 = 432$ lidí. Jako Projekt L-F je tedy označeno $720 - 432 = 288$ lidí.

Přišlo-li dnes x lidí, včera jich podle zadání přišlo $2x$ a předevčírem $1,5 \cdot 2x = 3x$. Jelikož za všechny tři dny dohromady přišlo 720 lidí, dostáváme $720 = x + 2x + 3x = 6x$, tj. $x = 120$.

Předevčírem byla v práci třetina Generálního personálu, to je $\frac{432}{3} = 144$ lidí. Včera jich zase bylo $\frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 120 = 180$. Dnes je tedy v práci zbývajících $432 - 144 - 180 = 108$ členů Generálního personálu.

Úloha 3. *…představte si, že budeme hrát kostky se dvěma kostkami, ale místo součtů budeme používat součiny počtů teček. Tohle je, doktore Shirazi, to, co víte o hodech:*

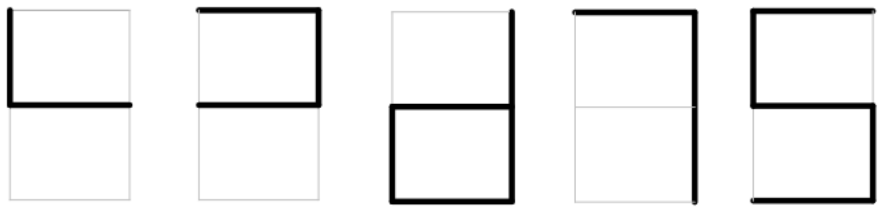
- Skóre pro druhý hod je o 5 větší než skóre pro první.
- Skóre pro třetí hod je o 6 menší než skóre pro druhý.
- Skóre pro čtvrtý hod je o 11 větší než skóre pro třetí.
- Skóre pro pátý hod je o 8 menší než skóre pro čtvrtý.

Povězte mi, jaké bylo skóre ve všech hodech, prosím.

Možné součiny jsou: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36$. Označíme-li si první skóre jako x, ze zadání dostáváme druhé skóre rovno $x + 5$, třetí rovno $x + 5 - 6 = x - 1$, čtvrté rovno $x - 1 + 11 = x + 10$, páté rovno $x + 10 - 8 = x + 2$.

Nyní zbývá pouze najít vhodné x, pro které budou hodnoty dalších skóre přípustné. Jediné odpovídající takovéto řešení je $x = 10$, tedy jednotlivá skóre jsou: $10, 15, 9, 20, 12$.

Úloha 4. *Na obrazovce je pěticiferný kód. Bohužel SARA zahlédla jen část. Kolik možností kódu existuje, známe-li toto:*



U první číslice máme pět možností (4, 5, 6, 8, 9), u druhé čtyři možnosti (2, 3, 8, 9), u třetí jedinou (8), u čtvrté čtyři (3, 7, 8, 9) a u páté taky čtyři (5, 6, 8, 9). Z toho vyplývá $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ možností.

Úloha 5. *Řešte v oboru reálných čísel rovnici:*

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3+x} = 5$$

Umocníme rovnici dvakrát po sobě na druhou, abychom se zbavili odmocnin. Pozor, umocňování není ekvivalentní úprava, proto na konci budeme muset provést zkoušku!

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x-2} + \sqrt{3+x})^2 &= 5^2 \\
x - 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{3+x} + 3 + x &= 25 \\
2\sqrt{(x-2)(3+x)} &= 24 - 2x \\
\sqrt{(x-2)(3+x)}^2 &= (12-x)^2 \\
x^2 - 2x + 3x - 6 &= 12^2 - 24x + x^2 \\
25x &= 150 \\
x &= 6.
\end{aligned}$$

Číslo 6 je opravdu řešením, jelikož $\sqrt{6-2} + \sqrt{3+6} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$.

Úloha 6. *Žena SAŘE sdělila, že ciferný součet jednorázového tokenu n se mění po každém použití. Naštěstí se pouze zvyšuje o jedna a ona spravuje stromovou databázi, takže díky tomu, že poslední měl ciferný součet 17, bude mít ten hledaný ciferný součet 18. Navíc platí, že počet jeho cifer je roven nejmenšímu prvočíslu, které dělí číslo n, jeho druhá cifra je rovna aritmetickému průměru všech ostatních cifer a že pokud n vydělíme třemi, tak dostaneme číslo, které je rovno součtu dvacetinásobku první cifry čísla n s číslem 89. Určete jednorázový token n.*

Jelikož hledaný ciferný součet tokenu n je 18, tak platí, že n je dělitelné třemi. Jestliže je dělitelné třemi, tak nejmenší prvočíslo, které n dělí, je buď 3, nebo 2. Pokud by platilo, že 2 dělí n, tak n musí být dvojciferné. Ale jediné dvojciferné číslo, které má ciferný součet 18, je číslo 99, ale to není sudé, tedy ho nemůže dělit dvojka. Proto je nejmenší prvočíselný dělitel n roven třem a n je liché a trojciferné.

Označme si cifry hledaného tokenu n jako a, b, c, kde a je číslice na pozici stovek, b na pozici desítek a c na pozici jednotek. Potom platí, že $a+b+c = 18$ a $\frac{a+c}{2} = b$, tedy $a + c = 2b$ a po dosazení do první rovnice dostáváme $3b = 18$, tedy $b = 6$ a $a + c = 12$. Z toho, že n můžeme zapsat jako abc, vyplývá:

$$n = 100a + 10b + c = 99a + 6 \cdot 10 + (a + c) = 99a + 60 + 12 = 99a + 72.$$

Tedy $\frac{n}{3} = 33a + 24$, to se ale ze zadání má rovnat $20a + 89$, což už je jednoduchá rovnice.

$$\begin{aligned} 3a + 24 &= 20a + 89 \quad &/ - 20a \\ 13a + 24 &= 89 \quad &/ - 24 \\ 13a &= 65 \quad &/ : 13 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Tedy $a = 5$ a $c = 12 - 5 = 7$ a hledaným tokenem n je číslo 567.

Úloha 7. *Ve sledovacím náramku jsou tři baterie, které je třeba odpálit zároveň, jinak spustí poplach. Jsou na základové desce přitavené tak, že tvoří pravoúhlý trojúhelník se stranami o délkách a, b, c. Strana s délkou c je přepona. Určete hodnoty a, b, c, víte-li, že platí $a + b = 6$ cm a zároveň:*

$$\frac{a^2}{c^2 - a^2} - \frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Upravme nejprve druhou rovnici v zadání. Z Pythagorovy věty platí $a^2 + b^2 = c^2$, tj. $c^2 - a^2 = b^2$ a $b^2 - c^2 = -a^2$. Po dosazení dostáváme

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{b^2}{a^2} + 1.$$

Nyní již budeme jen rovnici ekvivalentně upravovat (první z následujících úprav si můžeme dovolit, protože je $(ab)^2$ kladné):

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} &= 2 \qquad / \cdot (ab)^2 \\ a^4 + b^4 &= 2a^2b^2 \\ a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &= 0 \\ (a^2 - b^2)^2 &= 0 \\ (a + b)^2(a - b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pokud je součin roven nule, je nule roven některý z činitelů, tedy buď $(a + b)^2$, nebo $(a - b)^2$ je rovno nule. Rovnice má tedy dvě řešení $a = b$ a $a = -b$. Délky stran však nemohou mít zápornou hodnotu, takže řešením v našem případě je pouze $a = b$. Z druhé rovnice pak snadno vyjádříme b: $a + b = 2b = 6$, a tedy $b = 3$ cm a $a = b = 3$ cm. Délku strany c již snadno určíme přímo z Pythagorovy věty: $c = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm.