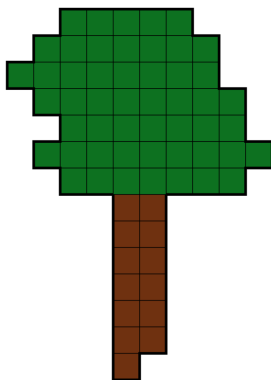
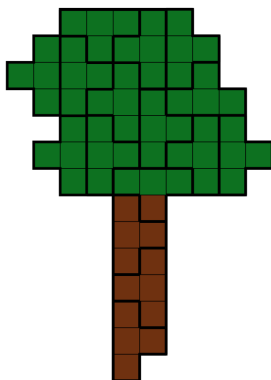


Řešení První Série

Úloha 1. Jaký tvar musí mít větev, jestliže má mít velikost tři až pět čtverečků a musí být spojitá (každý čtvereček má s alespoň jedním dalším čtverečkem společnou hranu), aby určitým počtem stejných větví šel beze zbytku vyplnit strom na obrázku? Zdůvodni, proč nelze použít žádný jiný tvar.



V obrázku je 64 čtverečků, což je počet, který je z nabídky útvarů o velikosti 3, 4 a 5 dělitelný pouze 4, tedy můžeme hned vyloučit útvary o velikosti 3 a 5. Zbývají nám pouze klasická tetromina ze hry tetris, neboli spojitě útvary o velikosti 4. Postupným vylučováním útvarů na okrajích (např. spodek kmenu) dostaneme jediný možný a jím už lze jednoduše vyplnit celý strom.



Úloha 2. Ištván a Šimon mají stádo koz, které si pojmenovali podle jejich vlastností. Jedna z jejich koz vždy mluví pravdu, jedna vždy lže a zbylé dvě to s každou větou střídají. Neví však, která je která. Pomozte jim to zjistit, jestliže víte, že řekly tyto věty:

- Blbounek: „Já mluvím vždy pravdu.“ + „Tupeček to vždy střídá.“
- Zaostálek: „Já mluvím vždy pravdu.“ + „Tupeček to vždy střídá.“
- Zabedníček: „Já mluvím vždy pravdu.“ + „Zaostálek to vždy střídá.“

- Tupeček: „Já vždy lžu.“ + „Zabedníček vždy lže.“

Zaměřme se nejprve na výrok Tupečka, který tvrdí, že vždy lže. To o sobě nemůže tvrdit ani lhář ani pravdomluvec, tedy Tupeček to musí střídat a o první větě lhát. Výrok Zabedníček vždy lže tedy musí být pravdivý, z čehož vyplývá, že Zaostálek to nestřídá, tedy musí mluvit vždy pravdu. Na Blbounka zbývá už jen opět střídání a kontrolou všech výroků si můžeme ověřit, že naše řešení je správné.

Úloha 3. *Kolikrát denně si Carlos myslí, že je větev, myslí-li si to pouze v takové časy, pro něž platí, že v digitální podobě je čas osově souměrný podle vodorovné osy a zároveň součet všech cifer je sudé číslo?*

Aby byl digitálně psaný čas osově souměrný podle vodorovné osy, musíme použít pouze číslice 0, 1, 3 a 8. Aby byl ciferný součet sudý, musíme použít zároveň sudý počet lichých číslic. Platí, že na pozici desítek v hodinách smí být pouze 0 a 1, takže máme 2 možnosti, na pozici jednotek pak může být cokoliv, tedy máme 4 možnosti, na pozici desítek u minut může být 0, 1 nebo 3, to jsou 3 možnosti. Na pozici jednotek u minut může být teoreticky cokoliv, ale aby byl ciferný součet sudý, máme pouze 2 možnosti, jelikož pokud součet prvních tří cifer je lichý, musíme dát na čtvrtou pozici liché číslo (1 nebo 3), což nám dává 2 možnosti a v případě, že byl součet prvních tří cifer sudý, musíme použít sudé číslo (0 nebo 8), což jsou také 2 možnosti. Celkově tedy $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ možností. Carlos si to myslí 48krát denně.

Úloha 4. *Carlos má dvě sklenice s kuličkami, v první je 20 červených kuliček, v druhé je 20 modrých kuliček. Vezme z první sklenice 5 červených kuliček a přemístí je do druhé sklenice s modrými kuličkami. Pak vezme 5 libovolných kuliček z druhé sklenice a přemístí je do první sklenice tak, aby v obou sklenicích bylo 20 kuliček. Můžeme říct, že počet červených kuliček v první sklenici je větší než počet modrých kuliček ve druhé sklenici?*

Po prvním kroku, se bude v první sklenici nacházet 15 červených kuliček, v druhé sklenici 20 modrých a 5 červených. V pěti libovolně vybraných kuličkách pak bude x červených kuliček, a tudíž $5 - x$ modrých kuliček. Po přesunutí se počet červených kuliček v první sklenici zvětší o x , bude jich tam tedy $15 + x$. Počet modrých kuliček v druhé sklenici se sníží o $5 - x$, tedy jich tam bude $20 - (5 - x) = 15 + x$. Počet červených kuliček v první sklenici tedy musí být stejný, jako počet modrých kuliček v druhé sklenici.

Úloha 5. *Jája nakrmí čtvrtinu kůrovníků za 2 hodiny. Pája spolu s Jájou poté nakrmí $\frac{2}{5}$ kůrovníků za 2 hodiny. Zbytek kůrovníků potom nakrmí Jája spolu s Františkem Komárkem za půl hodiny. Spočítejte, za jak dlouho by zvládl celou práci udělat sám František Komárek.*

A..... udělá za 1h $1/8$ práce
 A+Budělají za 1h $1/5$ práce
 B.....udělá za 1h..... $1/5 - 1/8 = 3/40$ práce
 B+C.....udělají za 0,5h..... $1 - 1/4 - 2/5 = 7/20$ práce
 B+C.....udělají za 1h..... $7/10$ práce
 C.....udělá za 1h..... $7/10 - 3/40 = 5/8$ práce
 C by udělal celou práci za 96 minut

Úloha 6. Najděte nejmenší číslo, kterým když vynásobíte číslo 1357, dostanete číslo končící na 7531.

Aby byla na posledním místě 1 musí na poslední číslici našeho čísla být 3. Neexistuje totiž jiná číslice než 3, pro kterou by platilo, že po vynásobení sedmi dostaneme součin, kde je poslední cifrou 1.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ \cdot 3 \\ \hline 4071 \end{array}$$

Nyní máme na pozici desítek 7, ale my tam potřebujeme 3, tedy potřebujeme k 7 přičíst 6. Tedy předposlední cifrou našeho hledaného čísla musí být 8. Opět je to z toho důvodu, že existuje pouze jedna číslice, kterou když vynásobíme 7 dostaneme součin, kde poslední cifrou bude 6.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ \cdot 83 \\ \hline 4071 \\ 10856 \\ \hline 112631 \end{array}$$

Teď máme na pozici desítek a jednotek správné cifry, ale na stovkách stále ne. Je tam 6 a my potřebujeme 5, tedy musíme přičíst 9. Opět existuje pouze jedna cifra, pro kterou platí, že když ji vynásobíme 7 dostaneme součin končící na 9 a to je cifra 7.

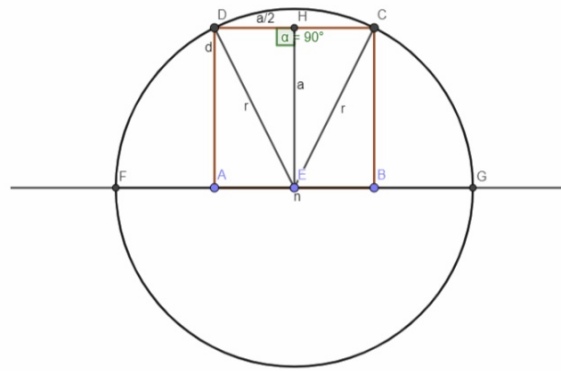
$$\begin{array}{r} 1357 \\ \cdot 783 \\ \hline 4071 \\ 10856 \\ 9499 \\ \hline 1062531 \end{array}$$

Stejným způsobem vybereme i další cifru našeho hledaného čísla. Potřebujeme na pozici tisíce dostat 7, ale je tam 2, tedy musíme přičíst 5. Jediná cifra, co po vynásobení 7 nám dá součin končící na 5 je 5.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ \cdot 5783 \\ \hline 4071 \\ 10856 \\ 9499 \\ 6785 \\ \hline 7847531 \end{array}$$

Naším hledaným číslem je tedy 7847531.

Úloha 7. Hangár dronu má tvar půlkruhu o poloměru 10. Jaké největší rozměry může mít kotel tvaru krychle, aby půlkruhovou dírou prošel? Kotel se musí sunout po zemi, protože je velice těžký (to znamená, že jedna jeho hrana musí být postavená na průměru).



Víme, že DE je poloměr půlkruhu, tedy r . Označíme stranu čtverce a . Vezměme pravoúhlý trojúhelník DEH se stranami $a, \frac{a}{2}, r$. Pro něj musí platit Pythagorova věta:

$$\begin{aligned}
 a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= r^2 \\
 a^2 + \frac{a^2}{4} &= 10^2 \\
 \frac{5a^2}{4} &= 100 \\
 a^2 &= \frac{100 \cdot 4}{5} \\
 a^2 &= 80 \\
 a &= \sqrt{80} \doteq 8,94
 \end{aligned}$$

Největší hrana krychle může být 8,94.