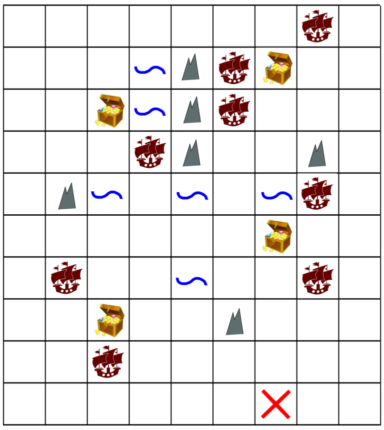
Řešení 5. Série

Úloha 1. *Na mapě jsou poklady, piráti, útesy a proudy. Křížek označuje, kde začínáš. Máš maximálně 25 kol na sebráním všech 4 pokladů. Nesmíš se přitom setkat s piráty a narazit do útesů (stoupnout na stejné pole). Piráti krouží kolem pokladů po směru hodinových ručiček, každé kolo se pohnou o jedno políčko (tj. za 8 kol ho obeplují celý). Ty se můžeš pohybovat vodorovně nebo svisle, vždy o jedno pole za kolo nebo můžeš zůstat libovolný počet kol na místě. Útesy zůstávají na místě, ale na jeho sousedních polích (dotýkajících se stranou nebo rohem) nesmíš čekat, můžeš přes ně pouze projít. Když stoupneš na proud, tak tě může urychlit libovolným směrem o 1 políčko, tj. můžeš jít další kolo až o dvě políčka, ale na políčku proudu nelze vyčkávat (proud tě posune tak jako tak alespoň o 1 pole). Na piráty nemá proud vliv. Popiš celou svou cestu.*



Jedno z možných řešení je tato sekvence pohybů:

doleva, nahoru, doleva, nahoru, doleva, doleva, (poklad), nahoru, nahoru, nahoru, doprava 2x, (po proudu), doprava 2x, dolů, (poklad), čekáš, doleva, doleva, nahoru, doleva 2x, nahoru 2x, (poklad), dolů, dolů, doprava 2x, doprava 1x (pomalejší verze na proudu), doprava, nahoru 2x, nahoru, (poklad)

Efektivní způsob řešení je postup od pokladu k pokladu (na etapy). Zjistíme nejkratší cestu od startu k bližším dvěma pokladům (k vzdálenějším je cesta podstatně delší a lze již odhadnout neúspěch) a pohyb pirátů poté při dalších přesunech zakreslíme již jako výchozí postavení na bližším pokladu pro lepší představu.

Úloha 2. *Mějme menší kolečko a větší kolečko. Menší kolečko má na obvodu jeden bod, který zanechává na větším kolečku otisk, když se ho dotkne. Jestliže chceme na větším kolečku vytvořit právě 8 otisků tvořících vrcholy pravidelného 8-úhelníku tak, že budeme menší kolečko obtáčet po větším, jak velký musí být poloměr menšího kolečka v závislosti na poloměru většího kolečka? Najdi všechny možnosti.*

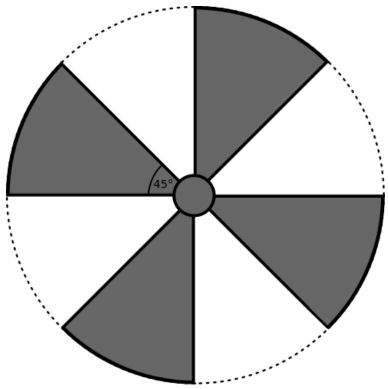
Označme poloměr většího kolečka m a poloměr menšího kolečka n. Obvod obou koleček je tedy $2\pi m$ a $2\pi n$. První, co nás napadne, je, že každé otočení malého kolečka o 360° udělá otisk vzdálený od minulého otisku $\frac{1}{8}$ obvodu velkého kolečka, čímž se po osmi otočeních dostaneme na výchozí pozici a máme splněno. V takovém případě musí platit $2\pi n = 2\pi m \cdot \frac{1}{8}$, kde nám 2π vypadne a dostaneme $n = \frac{1}{8}m$, čili poloměr menšího kolečka je osmina poloměru většího kolečka.

Ovšem zadání nám napoví, že nejsme hotovi. Menší být poloměr nemůže, neboť bychom vytvořili víc než 8 otisků, a zároveň musí být poloměr menší než poloměr většího kolečka. Víme, že otisky od sebe mají být vzdálený osminu poloměru většího kolečka a můžeme si toto označit za vlastní délku d. V našem vyřešeném případě dělalo menší kolečko otisk po každé ujeté délce d. Mohlo by to však brát i po více. V takovém případě však nesmí být počet d, které ujede, než udělá otisk, soudělný s počtem chtěných otisků, neboť bychom pak mohli točit dle libosti a měli bychom stále stejný počet otisků nižší než 8. Hledáme tedy čísla od 1 do 8 nesoudělná s 8, což jsou tedy 1, 3, 5 a 7. To znamená, že menší kolečko může mít stejně tak poloměr $\frac{3}{8}m$, $\frac{5}{8}m$ a $\frac{7}{8}m$ a toto jsou všechny čtyři varianty, které vyhovují zadání.

Úloha 3. *Dokažte, že platí nerovnost:* $(x+y)(2x-y)+(3x-y)y \geq (x+y)(x-y)-(2y-4x)y$ *kde* x *a* y *jsou reálná čísla.*

Po jednoduchých úpravách dostaneme, že $x^2+y^2 \geq 0$, což triviálně platí, neboť druhé mocniny, jsou vždy nezáporná čísla.

Úloha 4. *Větrák má 4 stejné lopatky (viz obrázek) tvořící kruhové výseče s úhlem* $45°$. *Mezi nimi jsou 4 stejně velké mezery. Větrák se otáčí rychlostí 13 otáček za sekundu. Jsi šikovný a dokážeš do něj strčit ruku právě na jednu setinu. Jaká je pravděpodobnost, že se nezraníš, když takto učiníš v náhodnou chvíli? (Zranění nastane, když se ruka dotkne lopatky).*



Každá výseč lopatky má ze zadání úhel $45°$. Zbývá tedy $360° - (4 \cdot 45) = 180°$ na mezery. Jsou čtyři a stejně velké, tudíž má každá taktéž $\frac{180}{4} = 45°$. Tedy jedna mezera, ve které se musí ruka na dobu jedné setiny udržet je $\frac{1}{8}$ kruhu.

Pravděpodobnost není nutno počítat, protože lze jednoduše zjistit, že $\frac{13}{100} = 0,13$, tzn. taková část z celé kružnice přijde do kontaktu s rukou. Vzhledem k tomu, že velikost mezery $(\frac{1}{8})$ je v desetinných číslech $0,125$, není šance aby nedošlo k zranění protože $0,13 > 0,125$. Pravděpodobnost zranění je tedy 0

I kdyby velikost mezery odpovídala přesně, musíme zohlednit tloušťku ruky a to, že by i tak došlo k její celkové amputaci. I s dostatečnou rezervou pro ruku ovšem tuto činnost nedoporučujeme, pravděpodobnost sice není nulová, ale stoprocentní také ne, nehledě na to, že stále operujeme s velice pochybným časem jedna setina.

Úloha 5. *7 subjektů má být očkováno.*

A: Nebudu očkován, pokud se mnou nepůjdou alespoň další tři, co mě odnesou až omdlím.

B: Půjdu jenom, pokud půjdou všichni.

C: Nepůjdu, pokud půjde A nebo B.

D: Půjdu jen tehdy pokud se mnou půjde F.

E: Nechci být lichý. Půjdu jen tehdy pokud počet subjektů i se mnou, co bude očkováno, bude sudý.

F: Mám trochu sociální fobii, nezvládnu víc než 2 další subjekty.

G: V žádném případě nepůjdu, pokud tam bude D.

Jaký je největší počet subjektů, kterou můžeme nechat očkovat, pokud máme dostatek peněz na to, abychom podplatili nejvýš jeden subjekt, aby přehlédl své nároky a šel?

Určitě nepůjde, abychom na očkování dostali všech 7. Jsou tam dva, kteří mají problémy s tím, že někdo půjde a oba dva bychom nepodplatili.

6 subjektů taky na očkování nedostaneme, protože B by nešlo, F by taky nešlo a pak by nešlo ani D. Což by se dalo vyřešit tím, že podplatíme F. A by s tím problém neměl, ale C zase nepůjde, protože půjde A. 6 subjektů taky nepůjde.

Při počtu 5 subjektů nebude chtít jít B a E a F, proto by nešlo D. Dalo by se to vyřešit podplacením F, pak by byl ale problém s C, které tam nebude chtít jít kvůli A. 5 subjektů taky nemůžeme naočkovat.

Pří počtu 4 subjektů by určitě nešel: B a F. Kvůli F by nešel D. E je bezkonfliktní, toho na očkování můžeme poslat. Protože D nepůjde může jít na očkování i G. Zbývá A a C. C nebude chtít jít, protože by šlo A. Můžeme ale podplatit C. Pak by na očkování šli A, C, E a G.

Úloha 6. *Je dán čtyřúhelník ABCD, přičemž* $|AB| = 8$ *a* $|BC| = 15$ *a* $|AC| = 17$*. Určete všechny možné délky zbývajících stran, jestliže víte, že jsou celočíselné a čtyřúhelníku se dá opsat kružnice.*

Klíčové v úloze je povšimnutí, že trojúhelník ABC je pravoúhlý, neboť z Pythagorovy věty $8^2 + 15^2 = 17^2$. Protože víme, že bod D leží na kružnici opsané, znamená to, že leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC. To znamená, že trojúhelník ACD je pravoúhlý s přeponou AC. Hledáme tedy přirozená čísla a, b taková, že $a^2 + b^2 = 17^2 = 289$. Možností není příliš, a tak netrvá dlouho, než zjistíme, že vyhovuje jediná dvojice, a to dvojice, kterou jsme měli již v zadání $-[8; 15]$.

Úloha 7. *Dokažte, že dvojnásobek součtu hodnot všech karet karetní postupky je dělitelný jejich počtem.*

Pro řešení je nejprve nutné, odvodit si vzorec součtu řady $1 + 2 + 3\Delta\Delta\Delta n$. Součet této řady označme N. Nyní vytvořme novou řadu, jejíž každý člen bude roven n + 1 se stejným počtem členů. Její součet označme M. Vyjádříme si rozdíl M – N:

$$n + 1 – 1 + n + 1 – 2 + n + 1 – 3\Delta\Delta\Delta n + 1 – n = n + n – 1 + n – 2\Delta\Delta\Delta 1$$

Tato řada začíná n a končí 1. Všechny intervaly mezi členy jsou 1. Můžeme tedy prohlásit, že je rovna naší původní řadě: N = M – N. Když nyní vyjádříme M, můžeme N zapsat jako $\frac{M}{2}$.

$$M = n + 1 + n + 1 + n + 1\Delta\Delta\Delta n + 1 = nn + 1$$

Z toho tedy vyplývá, že $1 + 2 + 3\Delta\Delta\Delta n = nn + 12$, což je vzorec, který většina z vás důvěrně zná.

V naší úloze potřebujeme vyjádřit součet $S = a + (a + 1) + (a + 2)(a + n - 1)$, kde a je počáteční člen a n je počet členů řady. Výraz vyjádříme jako:

$$S = na + [1 + 2 + 3 + (n - 1)] = na + (n - 1)n2$$

Alespoň jedno číslo z dvojice $n - 1$ a n musí být sudé, tedy výsledný součet je vždy celočíselný. Je však zřejmé, že z něj můžeme vytknout n, a tedy ho n dělí. Jsme v cíli.