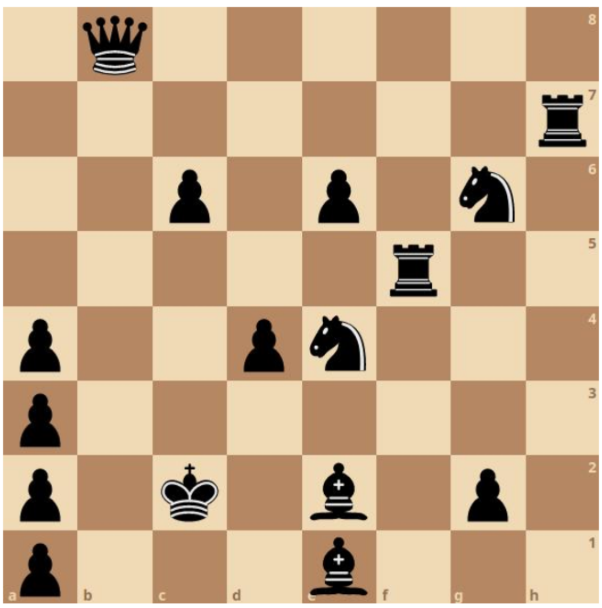
# Řešení Čtvrté Série

**Úloha 1.** *Rozestav jednu sadu šachových figurek (tj. 8 pěšců, 2 střelci, 2 jezdci, 2 věže, dáma a král - všechny figurky mají stejnou barvu) na šachovnici, pokud víš, že žádná figurka není ohrožená a číslo v každém poli určuje počet figur, jež dané pole ohrožují. Ohrožení = figurka může podle klasických šachových pravidel v příštím tahu vyhodit jinou figurku na daném poli, pokud by se tam ta jiná figurka nacházela. Každá figurka může ohrozit každou, nezávisle na jejich barvě. Orientace šachovnice je dána tak, jako na obrázku.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 0 | 2 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 |
| 0 | 3 | 3 | 2 | 0 | 3 | 3 | 2 |
| 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |

Úloha má jediné řešení. Klíčový fakt, jenž je potřeba si uvědomit je, že figurky musí stát na polích, kde je 0 - tzn. nebudou ohroženy. Pak už se jen pro každé pole určí figurka v závislosti na pohybových možnostech této figurky (např. pole, kde je dáma nesmí mít ve stejném řádku, sloupci ani úhlopříčce další pole, kde je 0 - dáma ho ohrožuje)



**Úloha 2.** *Jaké je 2020té přirozené číslo, které začíná čtyřčíslím 2020?*

2020 – 1
20200, 20201, ... 20209 – 10
202000, 202001, 202002, ... 202099 – 100
2020000, 2020001, ... 2020999 – 1000
20200000, 20200001, ... 20209999 – 10 000
Víme tedy, že 2020. číslo musí být osmiciferné. 20200000 je zřejmě 1112. číslo. 2020. číslo tedy musí být o 908 větší – tedy 20200908.

**Úloha 3.** *Mějme obdélník se stranou 1 a druhou stranou neznámé délky, o níž víme, že je větší než 1. Obdélník rozdělíme na dva stejné menší obdélníky tak, že řez vedeme středy delších stran. Vznikly nám dva shodné obdélníky podobné původnímu obdélníku (tj. se stejným poměrem stran). Jak dlouhá je neznámá strana? (Mimochodem přesně takto jsou papíry A4 dělané).*

Délku neznámé strany označíme $x$. Rozměry nově vzniklých obdélníků budou 1 a $\frac{x}{2}$, kde $\frac{x}{2} < 1$ (musí platit, protože kdyby $\frac{x}{2} > 1$, tak by nemohl mít nově vzniklý obdélník stejný poměr stran). Bude tedy muset platit, že:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{\frac{x}{2}}{1} \\ 1 &= \frac{x^2}{2} \\ 2 &= x^2 \\ \pm\sqrt{2} &= x \end{aligned}$$

Neznámá strana musí být dlouhá $\sqrt{2}$ .

**Úloha 4.** *VZ měl doma tenisky, které měly velikost 44 a sám měl délku nohy 17 cm, a LR boty s velikostí 26 a délkou 11 cm. VP má délku nohy 23 cm, jakou má on velikost bot? Odvoďte i přepočet mezi rozměrem nohy a velikostí bot, za předpokladu, že je lineární. (Můžete to zkusit i pro evropské velikosti bot.)*

Pro přepočet bude zřejmě existovat nějaká lineární rovnice, např. $v = k \cdot d + a$, kde $v$ je velikost, $d$ délka nohy, $k$ lineární koeficient a $a$ absolutní člen. My známe hodnoty $v$ a $d$ ve dvou případech. Dosadíme je tedy do rovnice a získáme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 44 &= k \cdot 17 + a \\ 26 &= k \cdot 11 + a \end{aligned}$$

Z první můžeme třeba vyjádřit $a = 44 - 17k$ a dosadit do druhé:

$$\begin{aligned} 26 &= 11k + 44 - 17k && / - 44 \\ -18 &= -6k && / : (-6) \\ 3 &= k \end{aligned}$$

Dopočítáme a:

$$a = 44 - 17k = 44 - 3 \cdot = 44 - 51 = -7$$

Rovnice je tedy: $v = 3d - 7$

Velikost A: $3 \cdot 23 - 7 = 69 - 7 = 62$

(Pokud jste zkoušeli evropské velikosti, nejspíš jste došli k nějakým obludnostem. Pokud bychom použili rovnici $v = k \cdot d + a$, $k$ by mělo být vždy 1,5, ale hodnota absolutního členu není stálá, u každé boty je jiná, záleží i na značce apod. Je však zpravidla kladná a není větší než 2.)

**Úloha 5.** *Mějme 25 lidí a hromadu nějakých věcí. Kolik nejméně věcí potřebujeme, aby si z hromady mohla každá osoba vzít právě 6 po dvou různých věcí tak, aby šestice věcí každých dvou lidí byly různé a každou věc měl stejný počet lidí?*

25 lidí si vezme z hromady celkem 150 věcí - 6x25. Mezi těmito věcmi na hromadě je $x$ různých druhů věcí. Vzhledem k tomu, že každý druh věci má stejný počet lidí, musí $x$ dělit 150. $x$ nemůže být 2,3,5, ani 6, protože bychom pak nevytvořili 25 různých šestic. Hledaným číslem by tedy mohlo být 10. Měli bychom 10 druhů a každou by mělo 15 lidí (10x15=150).

Mějme deset druhů věcí: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$, $j$. Zkusme je rozdat mezi 25 lidí tak, aby každý měl šest různých věcí a každou věc mělo 15 lidí:

$$1 - abdfgh, 2 - abdfgi, 3 - abdfgj, 4 - abdfhi, 5 - abdfhj, 6 - acdfij, 7 - acdghi, 8 - acdghj,$$

$$9 - acdgij, 10 - acdhij, 11 - acefgh, 12 - acefgi, 13 - acefgj, 14 - acefhi, 15 - acefhj, 16 - bcefij,$$

$$17 - bceghi, 18 - bceghj, 19 - bcegij, 20 - bcehij, 21 - bdefgi, 22 - bdefhi, 23 - bdefhj, 24 - bdeghj,$$

$$25 - baegij$$

Vidíme, že to jde, tudíž hledaným číslem je 10.

**Úloha 6.** *Půdorysem střechy byl čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém se úhlopříčky půlí. Navíc pokud si vybereme libovolný bod $P$ na přímce $AB$ a libovolný bod $Q$ na přímce $CD$, tak vždy bude $PQ$ větší nebo rovno $AD$ a $PQ$ bude větší nebo rovno $BC$. Jaký tvar může být střecha?*

Zřejmě zadání splňují libovolný obdélník, tedy i čtverec. Ukážeme, že žádný jiný útvar bazén mít nemůže.

Protože se úhlopříčky půlí, musí se jednat o rovnoběžník. Předpokládejme, že žádný úhel není pravý. Dále pokud si zvolíme body $P, Q$ tak, že $P$ je pata výšky na stranu $AB$ a $Q = D$, potom $|PQ| < |AD|$, neboť $AD$ je shodná s úsečkou $AQ$, která je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku $APQ$. Tím jsme ukázali, že v rovnoběžníku musí být alespoň jeden pravý úhel, což ovšem znamená, že jsou pravé úhly u všech čtyř vrcholů.

**Úloha 7.** *Pro $n \geq 1$ a $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ řešte rovnici:*

$$\overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} = x_1 x_2 x_3 \dots x_n,$$

*kde $\overline{x_1 \dots x_n}$ značí n-místné číslo v dekadickém zápisu. Jako řešení uveďte množinu uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. (Nápověda: Porovnejte $\min(L)$ s $\max(R)$ pro konstantní $x_1$.)*

Nechť $\forall x_i : x_i \neq 0$. Pro fixní hodnotu neznámé $x_1$ levá strana rovnice nabývá svého minima pro $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$ s hodnotou

$$\min(L) > x_1 \cdot 10^{n-1}$$

a pravá strana rovnice nabývá svého maxima pro $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 9$ s hodnotou

$$\max(R) = x_1 \cdot 9^{n-1}.$$

Pro $n > 1$ zřejmě platí $x_1 \cdot 10^{n-1} > x_1 \cdot 9^{n-1}$, tedy dostáváme $\min(L) > \max(R)$, z čehož dostáváme SPOR. Alespoň jedno $x_i$ tedy musí být nulové.

Tím pádem je celá pravá strana nulová a na levé straně musí platit rovnou $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Množina kořenů je tedy jednoprvková, a to $\mathbb{K} = \{(0, 0, 0, \ldots, 0)\}$.

Pokud budeme striktně dodržovat, že číslo tvaru $\overline{00\ldots0}$ není $n$-místné, máme pro $n = 1$ právě deset řešení $\mathbb{K} = \{(0), (1), (2), \ldots, (9)\}$ a pro $n > 1$ je množina řešení prázdná, $\mathbb{K} = \emptyset$.